Correction des exercices : Développements limités

1) Exercice 1 : QCM

Enoncé :

Les fonctions suivantes admettent-elles des développements limités en 0 :

1. $f(x) = ln(x)$
2. $g(x) = \sqrt{x}$
3. $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Aide :

Il suffit ici de regarder si les fonctions sont continues.

Correction :

1. Lorsque x tend vers 0, $x \rightarrow ln\, x$ n'a pas de limite finie, donc pas de DL d'ordre 0, ni d'aucun autre ordre.
2. La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, donc n'a pas de DL d'ordre 1 en 0, ni d'aucun ordre supérieur à 1.
3. On a, pour tout entier n positif
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
Donc
$$e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$$
La fonction possède un DL d'ordre n pour tout entier n.

2) Exercice 2 :

Enoncé :

Calculez le développement limité en 0 d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x} + e^x$

Aide :

Il est possible de sommer des DL.

Correction :

Il suffit d'écrire :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Et de faire la somme :

$$f(x) = 2 + 2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + o(x^3)$$

3) Exercice 3 :

Enoncé :

Calculez le développement limité en 0 d'ordre 3 de la fonction $g(x) = \sin(x)\cos(x)$

Aide :

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$$

Correction

Deux méthodes possibles, une astucieuse, l'autre brutale :

- **Méthode astucieuses :**

En remarquant que :

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$$

Donc $g(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$

Et comme :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

On obtient donc

$$g(x) = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

- **Méthode brutale :**

En sachant que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Et

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

Donc

$$g(x) = (\,x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))(\,1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3))$$

Soit

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{2!} + o(x^3)$$

On prend garde a tronquer la multiplication à l'ordre 3.

Donc

$$g(x) = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

4) Exercice 4 :

Enoncé :

Calculez le développement limité en 0 d'ordre 3 de la fonction $g(x) = (\cos(x))^{\sin(x)}$

Aide :

Utilisez la définition des puissances avec exponentielle et logarithme.

Correction :

On exprime g de la façon suivante :

$$g(x) = \exp(\sin(x)\ln(\cos(x)))$$

Or

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Donc

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

Attention : on cherche le DL d'ordre 3 Donc pas besoin d'aller plus loin.

$$\sin(x)\ln(\cos(x)) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2!} + o(x^3)$$

D'où

$$g(x) = \exp(-\frac{x^3}{2!} + o(x^3))$$

Or

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Ainsi

$$g(x) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

5) Exercice 5 :

Enoncé :

Calculez le développement limité en 0 d'ordre 3 de tangente.

Aide :

$$(tan(x))' = 1 + tan^2(x)$$

Correction :

On sait que

$$\tan(x) \sim x \text{ en } 0$$

C'est-à-dire que

$$\tan(x) = x + o(x)$$

Et comme

$$(tan(x))' = 1 + tan^2(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

Et en intégrant on obtient :

$$\tan(x) = cste + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Or $tan(0) = 0$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

6) Exercice 6 :

Enoncé :

Calculez la limite en 0 de la fonction

$$h(x) = \frac{x - \arcsin(x)}{sin^3(x)}$$

Aide :

Exprimé un DL(0) de arcsin, en utilisant sa définition intégrale :

$$Arcsin(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Correction :

On sait que :

$$Arcsin(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Or

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

En effectuant le changement de variable : $x \to x^2$on obtient :

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Puis en intégrant on trouve :

$$Arcsin(x) = cste + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Or $Arcsin(0) = 0$. D'où

$$Arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc

$$x - \arcsin(x) \sim \ -\frac{x^3}{6}$$

Et comme

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x)$$

On en déduit

$$sin^3(x) \sim x^3$$

D'où

$$h(x) \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = \ -\frac{1}{6}$$

On en déduit donc que

$$\lim_{x \to 0} h(x) = -\frac{1}{6}$$